فهرست

۱ مفاهیم اولیهٔ حرکت‌شناسی

چرا حرکت‌شناسی؟

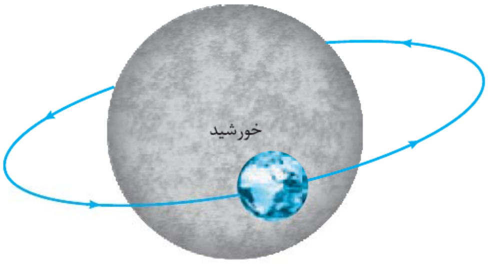
اطراف ما پُر است از اجسامی که در حال حرکت هستند، حتی همین کتابی که ظاهراً بدون حرکت در دستان شماست، از مولکول‌هایی تشکیل شده است که دائماً در حال نوسان و حرکت‌اند. خودِ شما و کتابی که در دست دارید، روی کرهٔ زمینی هستید که با تندی خیره‌کننده‌ای در حدود $108000 \, km / h$ در حال گردش به دور خورشید است. تصور کنید! شما سوار بر کرهٔ زمین در هر ثانیه نزدیک به $30 \, km$ در فضا حرکت می‌کنید.

هر جسمی در جهان هستی یا در حال حرکت انتقالی و یا چرخشی و یا نوسانی است؛ بنابراین برای درک بهتر این دنیای لغزان و غلتان و چرخان و لرزان!!! باید حرکت و انواع آن را بررسی کنیم.

بررسی حرکت اجسام در شاخه‌ای از دانش فیزیک به نام حرکت‌شناسی (سینماتیک) صورت می‌گیرد.

انواع حرکت

یک جسم می‌تواند در فضا (سه بعد)، صفحه (دو بعد) و یا بر خط راست (یک بعد) حرکت کند. پرواز مگس بالای سر شما وقتی خواب هستید، نمونه‌ای آزاردهنده از حرکت در سه بعد است!!! حرکت زمین به دور خورشید، اگر زمین را یک نقطه فرض کنیم، نمونه‌ای از حرکت روی صفحه است.

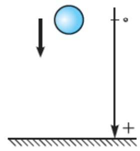


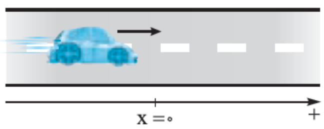
مثال‌های بالا نمونه‌هایی از حرکت دوبعدی و سه‌بعدی هستند اما در این فصل می‌خواهیم حرکت یک‌بُعدی یا همان حرکت روی خط راست را بررسی کنیم.

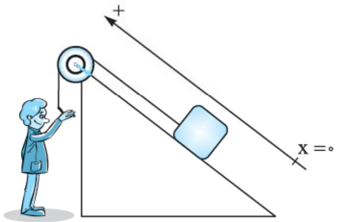
حرکت بر خط راست

در حرکت بر خط راست، مسیر حرکت خط راستی است که ممکن است افقی (مانند حرکت اتومبیل روی جادهٔ راست اُفقی)، قائم (مانند سقوط آزاد یک سنگ) و یا مایل (مانند بالارفتن جسمی از یک سطح شیب‌دار راست) باشد.

در این نوع حرکت، مسیر حرکت را به عنوان یکی از محورهای مختصات (x یا y) در نظر می‌گیریم و نقطه‌ای روی این محور را به عنوان مبدأ مکان ($x = 0$ یا $y = 0$) اختیار می‌کنیم. به شکل‌های زیر توجه کنید.







قبل از این‌که به ادامهٔ مبحث بپردازیم، بیایید با دو مفهوم اساسی در حرکت یعنی زمان و مکان، بیشتر آشنا شویم.

زمان و مکان

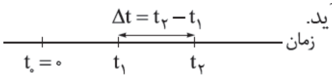
زمان

لحظه: لحظه به معنای یک تک‌مقدار از زمان است. اگر کمیت زمان را بر روی یک محور نشان دهیم، هر نقطه از این محور، یک لحظه را نشان می‌دهد.

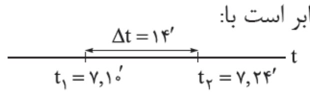
مبدأ زمان: به لحظهٔ شروع بررسی حرکت $(t_{\circ})$ مبدأ زمان می‌گوییم و به آن عدد صفر را نسبت می‌دهیم $(t_{\circ}=\circ)$. مثلاً در بررسی حرکت یک اتومبیل بنابر شرایط مسئله می‌توانیم لحظه‌های مختلفی را مبدأ زمان بگیریم؛ مثل لحظه‌ای که چراغ راهنمایی سبز می‌شود، لحظه‌ای که از اتومبیل دیگری سبقت می‌گیرد و یا لحظه‌ای که در فاصلهٔ معینی از مکان مشخصی قرار دارد.

بازهٔ زمانی: یک بازهٔ پیوسته بین دو لحظه را بازهٔ زمانی می‌نامیم و آن را با نماد $(t_۱, t_۲)$ نشان می‌دهیم. در واقع بازهٔ زمانی شامل تمام لحظات بین دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$ است.

مدت‌زمان بین دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$ که در واقع طول بازهٔ زمانی $(t_۱, t_۲)$ است، از رابطهٔ $\Delta t = t_۲ - t_۱$ به دست می‌آید.



نمونه دانش‌آموزی رأس ساعت هفت و ده دقیقه از منزل به راه می‌افتد و رأس ساعت هفت و بیست و چهار دقیقه به مدرسه می‌رسد. در این صورت طول بازهٔ زمانی حرکت این دانش‌آموز برابر است با:

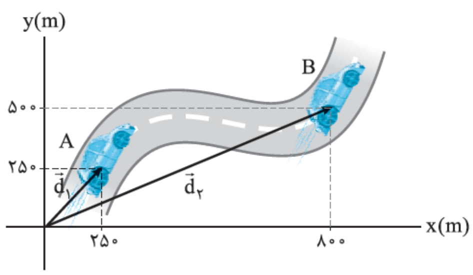


$$\begin{matrix} t_۱ = ۷{,}۱۰' \\ t_۲ = ۷{,}۲۴' \end{matrix} \Rightarrow \Delta t = t_۲ - t_۱ = ۷{,}۲۴' - ۷{,}۱۰' = ۱۴'$$

مکان، جابه‌جایی و مسافت طی‌شده

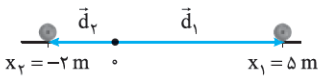
مبدأ مکان: همیشه حرکت اجسام را در یک دستگاه مختصات بررسی می‌کنیم. مبدأ این دستگاه مختصات را به عنوان مبدأ مکان در نظر می‌گیریم. مکان یک جسم در هر لحظه، نسبت به مبدأ مکان (مبدأ مختصات) سنجیده می‌شود.

بردار مکان: برداری که مبدأ مکان (محور) را به مکان جسم در هر لحظه وصل می‌کند، **بردار مکان** می‌نامیم. اگر با گذشت زمان، بردار مکان یک جسم تغییر کند، می‌گوییم آن جسم حرکت کرده است. مثلاً در شکل مقابل، اتومبیل در لحظهٔ $t_۱$ در نقطهٔ A و در لحظهٔ $t_۲$ در نقطهٔ B است؛ در واقع این یعنی متحرک از نقطهٔ A تا نقطهٔ B روی مسیر مشخص‌شده حرکت کرده است. بردارهای مکان این اتومبیل را در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ به صورت زیر نمایش می‌دهیم:



$$\vec{d}_۱ = x_۱\vec{i} + y_۱\vec{j} = (۲۵۰\,m)\vec{i} + (۲۵۰\,m)\vec{j}$$
$$\vec{d}_۲ = x_۲\vec{i} + y_۲\vec{j} = (۸۰۰\,m)\vec{i} + (۵۰۰\,m)\vec{j}$$

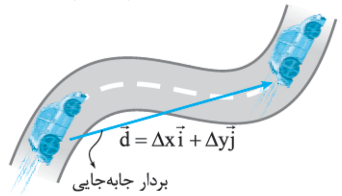
بردار مکان در حرکت بر خط راست: در حرکت بر خط راست، بردار مکان هم‌راستا با مسیر حرکت است و جهت آن یا در جهت مثبت محورِ انتخاب‌شده است و یا در جهت منفی آن. مثلاً در شکل زیر، بردارهای مکان توپ بولینگ در دو لحظه نشان داده شده است.



$$\begin{cases} \vec{d}_۱ = x_۱\vec{i} = (۵\,m)\vec{i} \\ \vec{d}_۲ = x_۲\vec{i} = (-۲\,m)\vec{i} \end{cases}$$

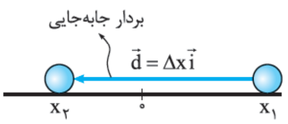
جابه‌جایی: برداری که مکان اولیهٔ متحرک را به مکان نهایی آن وصل می‌کند، **بردار جابه‌جایی** می‌نامیم و آن را با $\vec{d}$ نشان می‌دهیم. بردار جابه‌جایی از تفاضل بردار مکان نهایی و بردار مکان اولیه به دست می‌آید، یعنی: $\vec{d} = \vec{d}_۲ - \vec{d}_۱$

مثلاً در مثال اتومبیل، بردار جابه‌جایی برابر است با:



$$\vec{d} = \vec{d}_۲ - \vec{d}_۱ = [(۸۰۰\,m)\vec{i} + (۵۰۰\,m)\vec{j}] - [(۲۵۰\,m)\vec{i} + ۲۵۰\,m)\vec{j}] = (۵۵۰\,m)\vec{i} + (۲۵۰\,m)\vec{j}$$

و یا در مثال توپ بولینگ داریم:



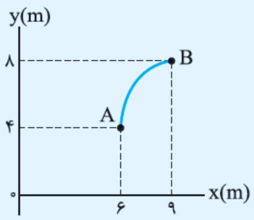
$$\vec{d} = \vec{d}_۲ - \vec{d}_۱ = (-۲\,m)\vec{i} - (۵\,m)\vec{i} = (-۷\,m)\vec{i}$$

اندازهٔ بردار جابه‌جایی را با d یا $|\vec{d}|$ نشان می‌دهیم. مثلاً در نمونهٔ بالا $d = ۷\,m$ است.

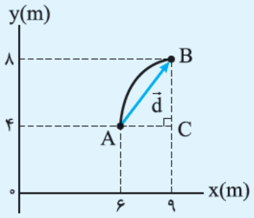
نکته **بردار جابه‌جایی، به مبدأ مختصات انتخاب‌شده بستگی ندارد.** برای مثال در نمونهٔ حرکت توپ بولینگ اگر هر نقطهٔ دیگری را به عنوان مبدأ مختصات (مکان) انتخاب کنیم، بردار جابه‌جایی همان $\vec{d} = (-۷\ \text{m})\vec{i}$ است.

مثال و پاسخ

مثال **متحرکی از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رود؛ اندازهٔ بردار جابه‌جایی این متحرک را به دست آورید.**



پاسخ **روش اول** ابتدا بردار جابه‌جایی که نقطهٔ A را به نقطهٔ B وصل می‌کند، رسم می‌کنیم.



حالا در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که تشکیل شده است، طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$AB^۲ = AC^۲ + CB^۲ \Rightarrow AB^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ = ۲۵ \Rightarrow |\vec{d}| = AB = ۵\ \text{cm}$$

روش دوم ابتدا بردار مکان‌های اولیه و نهایی جسم را به صورت $\vec{i}$ و $\vec{j}$ می‌نویسیم:

$$\vec{d}_A = (۶\ \text{m})\vec{i} + (۴\ \text{m})\vec{j}$$

$$\vec{d}_B = (۹\ \text{m})\vec{i} + (۸\ \text{m})\vec{j}$$

حالا از تفاضل بردار مکان‌های اولیه و نهایی، بردار جابه‌جایی را به دست می‌آوریم:

$$\vec{d} = \vec{d}_B - \vec{d}_A = [(۹\ \text{m})\vec{i} + (۸\ \text{m})\vec{j}] - [(۶\ \text{m})\vec{i} + (۴\ \text{m})\vec{j}] = (۳\ \text{m})\vec{i} + (۴\ \text{m})\vec{j}$$

و در نهایت اندازهٔ بردار جابه‌جایی را محاسبه می‌کنیم:

$$d = \sqrt{d_x^۲ + d_y^۲} = \sqrt{(۳\ \text{m})^۲ + (۴\ \text{m})^۲} = ۵\ \text{m}$$

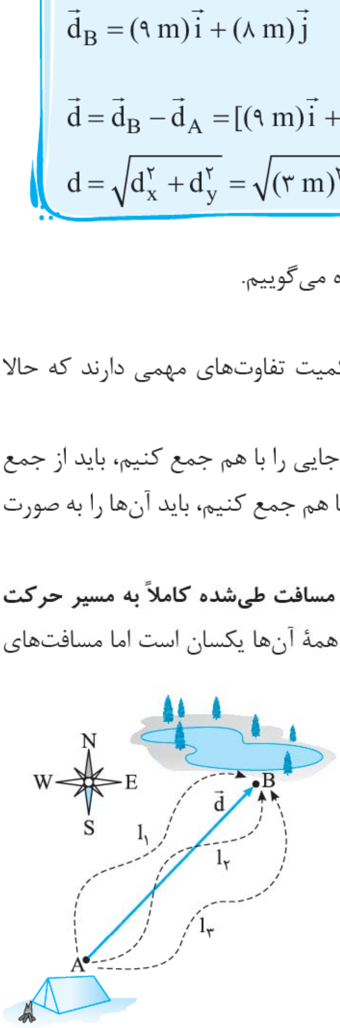
مسافت طی‌شده (l): به مجموع طول‌های پیموده‌شده توسط متحرک (طول مسیر حرکت)، مسافت طی‌شده می‌گوییم.

جابه‌جایی و مسافت طی‌شده چه فرقی دارند؟

هر چند یکای استاندارد مسافت طی‌شده، مانند یکای استاندارد جابه‌جایی، متر (m) است، اما این دو کمیت تفاوت‌های مهمی دارند که حالا می‌خواهیم آن‌ها را بیان کنیم:

۱ **جابه‌جایی کمیتی برداری است**؛ بنابراین علاوه بر بزرگی دارای جهت نیز می‌باشد. اگر بخواهیم چند جابه‌جایی را با هم جمع کنیم، باید از جمع برداری استفاده کنیم؛ اما **مسافت طی‌شده کمیتی نرده‌ای است** که جهت ندارد و اگر بخواهیم چند مسافت را با هم جمع کنیم، باید آن‌ها را به صورت جبری جمع کنیم. *(همون جمع معمولی خودمون)*

۲ **جابه‌جایی به مسیر حرکت بستگی ندارد**، بلکه فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی حرکت وابسته است. **اما مسافت طی‌شده کاملاً به مسیر حرکت بستگی دارد.** اگر چند متحرک از مسیرهای متفاوت بین دو نقطهٔ معین جابه‌جا شوند، بردار جابه‌جایی برای همهٔ آن‌ها یکسان است اما مسافت‌های پیموده‌شده توسط آن‌ها یکسان نیست.

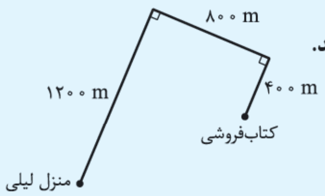


نمونه در شکل روبه‌رو، چند متحرک از مسیرهای متفاوت، از نقطهٔ A به نقطهٔ B رفته‌اند. بردار جابه‌جایی همهٔ متحرک‌ها $\vec{d}$ است اما مسافت پیموده‌شده توسط آن‌ها با هم متفاوت است؛ یعنی $l_۱ \neq l_۲ \neq l_۳$.

۳ اگر مسیر حرکت جسمی خط راست نباشد، مسافت طی‌شده توسط آن قطعاً از اندازهٔ جابه‌جایی بزرگ‌تر است. فقط در حرکت بر خط راست، آن هم به شرطی که متحرک تغییر جهت ندهد، مسافت طی‌شده با اندازهٔ جابه‌جایی برابر می‌شود؛ یعنی همواره داریم:

$$l \geq |\vec{d}|$$

مثال و پاسخ

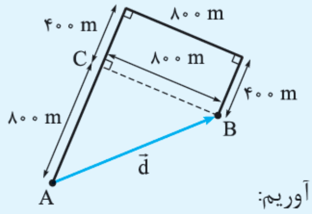


مثال **لیلی برای رفتن به کتاب‌فروشی، مسیر منزل تا کتاب‌فروشی را مطابق شکل طی می‌کند.**

الف) بردار جابه‌جایی لیلی را رسم کرده و اندازهٔ آن را به دست آورید.

ب) مسافت طی‌شده توسط لیلی را محاسبه کنید.

پاسخ **الف** بردار جابه‌جایی لیلی برداری است که مکان اولیهٔ لیلی (منزل) را به مکان ثانویهٔ او (کتاب‌فروشی) وصل می‌کند. اول این بردار را در شکل روبه‌رو رسم می‌کنیم:



حالا با توجه به شکل، می‌توانیم با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس اندازهٔ بردار جابه‌جایی را به دست آوریم:

$$|\vec{d}| = AB = \sqrt{AC^۲ + CB^۲} = \sqrt{۸۰۰^۲ + ۸۰۰^۲} = ۸۰۰\sqrt{۲}\,m \simeq ۱۱۳۱/۴\,m$$

ب مسافت طی‌شده توسط لیلی با مجموع طول‌های پیموده‌شده توسط او برابر است؛ یعنی:

$$l = ۱۲۰۰\,m + ۸۰۰\,m + ۴۰۰\,m = ۲۴۰۰\,m$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، چون لیلی تغییر جهت داده است، مسافت طی‌شده توسط لیلی از اندازهٔ جابه‌جایی او بزرگ‌تر است.

یک خبر خوب!!!

اگر با محاسبات برداری میانهٔ خوبی ندارید، برای شما خبر خوبی داریم!!

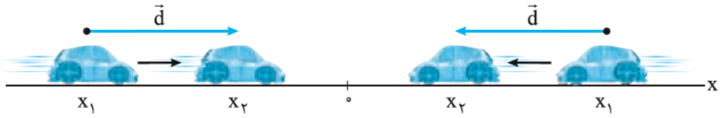
گفتیم که در این کتاب قصد داریم روی حرکت بر خط راست تمرکز کنیم. همان‌طور که دیدیم، در این نوع حرکت بردارهای مکان با مسیر حرکت هم‌راستا هستند و جهت آن‌ها یا مثبت است یا منفی؛ بنابراین از این به بعد در حرکت بر خط راست، مکان یک جسم را به جای بردار مکان با یک عدد نمایش می‌دهیم.

اگر مکان جسم سمت مثبت مختصات باشد، آن را با علامت مثبت و اگر مکان جسم سمت منفی مختصات باشد، آن را با علامت منفی نشان می‌دهیم.

در حرکت بر خط راست، بردار جابه‌جایی همیشه هم‌راستا با مسیر حرکت است و جهت آن یا هم‌سو با جهت مثبت محور و یا در خلاف جهت آن است؛ بنابراین می‌توانیم از خواص برداری جابه‌جایی نیز صرف‌نظر کنیم و آن را با اعدادی مثبت یا منفی نشان دهیم.

اگر جسمی در لحظهٔ $t_۱$ در مکان $x_۱$ و در لحظهٔ $t_۲$ در مکان $x_۲$ باشد، جابه‌جایی جسم در بازهٔ زمانی Δt برابر خواهد بود با: $\boxed{\Delta x = x_۲ - x_۱}$

اگر متحرک در جهت مثبت انتخاب‌شده حرکت کند، $x_۲ > x_۱$ و $\Delta x > ۰$ (مثبت) و اگر متحرک در جهت منفی محور حرکت کند، $x_۲ < x_۱$ و $\Delta x < ۰$ (منفی) خواهد بود.



$x_۲ > x_۱ \Rightarrow \Delta x > ۰$ $\qquad$ $x_۲ < x_۱ \Rightarrow \Delta x < ۰$

نمونه در مورد توپ بولینگِ شکل زیر مکان اولیه $(x_۱)$، مکان نهایی $(x_۲)$ و جابه‌جایی توپ (Δx) برابر است با:

$$\begin{cases} x_۱ = +۵\,m \\ x_۲ = -۲\,m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_۲ - x_۱ = (-۲\,m) - (+۵\,m) = -۷\,m$$

مسافت طی‌شده در حرکت بر خط راست

گفتیم که اگر متحرکی روی خط راست و بدون تغییر جهت حرکت کند، مسافت طی‌شده با اندازهٔ جابه‌جایی برابر است $(l = |\Delta x|)$ اما اگر متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، تغییر جهت بدهد، مسافت طی‌شده قطعاً از اندازهٔ جابه‌جایی بزرگ‌تر است $(l > |\Delta x|)$. در این حالت برای محاسبهٔ مسافت طی‌شده باید اندازهٔ (قدرمطلق) جابه‌جایی متحرک قبل از تغییر جهت را با اندازهٔ (قدرمطلق) جابه‌جایی بعد از تغییر جهت با هم جمع کنیم؛ یعنی: $l = |\Delta x_۱| + |\Delta x_۲|$

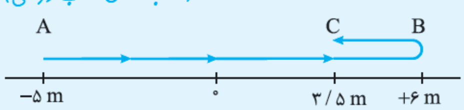
مثال و پاسخ

مثال **متحرکی مسیری مطابق شکل را بر خط راست طی می‌کند.**

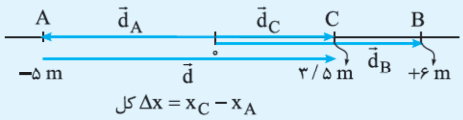
الف) بردار مکان نقاط A، B و C و بردار جابه‌جایی کل حرکت را رسم کنید.

ب) اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت طی‌شدهٔ جسم را به دست آورید.

(مشابه مثال کتاب درسی)



پاسخ **الف**



ب برای محاسبهٔ جابه‌جایی از نقطهٔ A تا نقطهٔ C داریم: $\Delta x_{کل} = x_C - x_A \Rightarrow \Delta x_{کل} = +۳/۵\,m - (-۵\,m) = +۸/۵\,m$

و اما چون متحرک در نقطهٔ B تغییر جهت داده است، برای محاسبهٔ مسافت طی‌شده، باید اندازهٔ جابه‌جایی جسم از A تا B را با اندازهٔ جابه‌جایی جسم از B تا C جمع کنیم:

$$d = |\Delta x_{AB}| + |\Delta x_{BC}| = |x_B - x_A| + |x_C - x_B| = |+۶\,m - (-۵\,m)| + |۳/۵\,m - ۶\,m|$$
$$= |+۱۱\,m| + |-۲/۵\,m| = ۱۱\,m + ۲/۵\,m = ۱۳/۵\,m$$

سؤال‌های امتحانی

۱- جای خالی را با کلمهٔ مناسب پر کنید.

الف) طول مسیر پیموده‌شده توسط متحرک را .... می‌نامیم.

ب) برداری که مبدأ محور را به مکان جسم در هر لحظه وصل می‌کند، .... نامیده می‌شود.

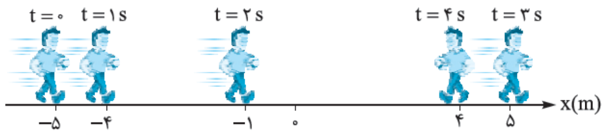
۲- کلمهٔ مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید.

الف) حرکت سیارهٔ زمین به دور خورشید، مثالی از حرکت (یک‌بعدی / دوبعدی) است. *(نهایی تجربی - خرداد ۹۴)*

ب) در حرکت یک‌بعدی، بدون تغییر جهت، مسافت طی‌شده (برابر با / بزرگ‌تر از) اندازهٔ جابه‌جایی است. *(نهایی تجربی - شهریور ۹۵)*

۳- بردار جابه‌جایی را تعریف کنید و یکای آن را بنویسید.

۴- قبل از شروع مسابقهٔ فوتبالی، محمد صلاح روی یک مسیر مستقیم به صورت رفت و برگشت می‌دَود تا خودش را گرم کند. محل قرارگیری او در زمان‌های ۱s، ۲s، ۳s و ۴s در شکل زیر نشان داده شده است. *(مشابه پرسش کتاب درسی)*



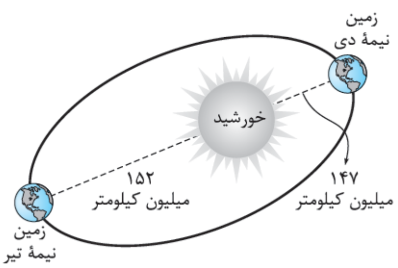
الف) بردار مکان محمد صلاح را در $t = ۱s$ روی شکل نشان دهید و آن را به صورت بردار یکه بنویسید.

ب) اندازهٔ جابه‌جایی محمد صلاح از صفر تا ۴ s چند متر است؟

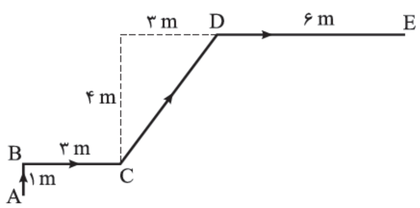
پ) بردار جابه‌جایی محمد صلاح را از ۱s تا ۳ s نشان دهید و آن را به صورت بردار یکه بنویسید.

ت) اگر محمد صلاح در $t = ۳s$ لحظه‌ای متوقف شود و به سمت محل اولیه برگردد، مسافت طی‌شده توسط او در طی ۴s چند متر است؟

۵- مدار حرکت زمین به دور خورشید یک بیضی به محیط تقریبی ۹۴۰ میلیون کیلومتر است. کم‌ترین فاصلهٔ زمین از مرکز خورشید ۱۴۷ میلیون کیلومتر است که در نیمهٔ دی‌ماه اتفاق می‌افتد. بیشترین فاصلهٔ زمین از مرکز خورشید هم در نیمهٔ تیر رخ می‌دهد که این فاصله در حدود ۱۵۲ میلیون کیلومتر است. با توجه به شکل روبه‌رو، بردار جابه‌جایی زمین از نیمهٔ تیر تا نیمهٔ دی را رسم کنید و اندازهٔ آن را با مسافت پیموده‌شده در این مدت مقایسه کنید. *(مشابه پرسش کتاب درسی)*



۶- علی از نقطهٔ A روی مسیر نشان داده‌شده در شکل روبه‌رو به نقطهٔ E می‌رود.



الف) مسافت طی‌شده توسط علی چند متر است؟

ب) بردار جابه‌جایی علی را رسم کنید.

پ) اندازهٔ جابه‌جایی علی چند متر است؟

ت) بردار جابه‌جایی علی را برحسب بردارهای یکه بنویسید.

۷- متحرکی از نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \end{bmatrix}$ به نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۸ \\ ۲ \end{bmatrix}$ می‌رود. این متحرک چند واحد جابه‌جا شده است؟

۲ سرعت و تندی

سرعت متوسط

نسبت جابه‌جایی به مدت‌زمان جابه‌جایی را **سرعت متوسط** می‌نامیم و آن را با نماد $\vec{v}_{av}$ نمایش می‌دهیم؛ یعنی:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} \Rightarrow v_{av} = \frac{d}{\Delta t}$$

در رابطهٔ بالا، d اندازهٔ جابه‌جایی برحسب متر (m)، Δt بازهٔ زمانی برحسب ثانیه (s) و v_{av} اندازهٔ سرعت متوسط برحسب متر بر ثانیه (m / s) است. با توجه به تعریف بالا و مثبت‌بودن Δt می‌فهمیم که **سرعت متوسط، کمیتی برداری است که همواره با بردار جابه‌جایی هم‌جهت است.**

نکته یکای متداول دیگری که برای سرعت به کار می‌رود، کیلومتر بر ساعت (km / h) است که با استفاده از رابطهٔ زیر، به متر بر ثانیه تبدیل می‌شود:

$$۱\frac{km}{h} \times \frac{۱\,h}{۳۶۰۰\,s} \times \frac{۱۰۰۰\,m}{۱\,km} = \frac{۱}{۳/۶}\,m/s$$

پس برای تبدیل‌کردن سرعت برحسب کیلومتر بر ساعت به سرعت برحسب متر بر ثانیه، باید آن عدد را بر ۳/۶ تقسیم کنیم.

نمونه ۳۶ km / h برابر ۱۰ m / s است:

$$۳۶\,km/h \div ۳/۶ = ۱۰\,m/s$$

مثال و پاسخ

مثال بردار جابه‌جایی متحرکی به صورت $\vec{d} = ۱۶\vec{i} - ۲۸\vec{j}$ داده شده است. اگر این جابه‌جایی در مدت‌زمان ۴ ثانیه صورت گیرد، بردار سرعت متوسط و اندازهٔ آن را به دست آورید.

پاسخ ابتدا بردار سرعت متوسط را به دست می‌آوریم:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \frac{(۱۶\vec{i} - ۲۸\vec{j})\,m}{۴\,s} = (۴\vec{i} - ۷\vec{j})\,m/s$$

و حالا اندازهٔ بردار سرعت متوسط را محاسبه می‌کنیم:

$$v_{av} = \sqrt{۴^۲ + (-۷)^۲} = \sqrt{۱۶ + ۴۹} = \sqrt{۶۵}\,m/s \simeq ۸/۱\,m/s$$

سرعت متوسط در حرکت بر خط راست

در حرکت بر روی خط راست می‌توانیم رابطهٔ سرعت متوسط را به صورت روبه‌رو بنویسیم:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}$$

نکته با این‌که ایمان داریم سرعت متوسط کمیتی برداری است، اما در حرکت بر خط راست می‌توانیم سرعت متوسط را مانند جابه‌جایی با یک عدد مثبت و یا منفی نمایش دهیم و از خواص برداری آن صرف‌نظر کنیم. با این فرض رابطهٔ سرعت متوسط در حرکت بر خط راست به شکل زیر درمی‌آید:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱}$$

در حرکت بر روی خط راست، **علامت سرعت متوسط نشان‌دهندهٔ جهت جابه‌جایی جسم در آن بازهٔ زمانی** است:

$$\Delta x > ۰ \Leftrightarrow v_{av} > ۰$$

$$\Delta x < ۰ \Leftrightarrow v_{av} < ۰$$

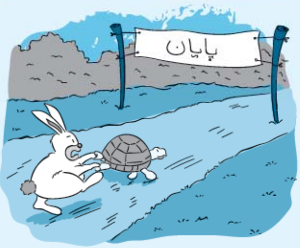
مثال و پاسخ

مثال اتومبیلی در لحظهٔ $t_۱ = ۲\,s$ در ۱۶ متری سمت راست مبدأ قرار دارد. اگر در لحظهٔ $t_۲ = ۶\,s$ این اتومبیل به ۱۶ متری سمت چپ مبدأ برود، سرعت متوسط اتومبیل در این بازهٔ زمانی را به دست آورید.

پاسخ در لحظهٔ $t_۱ = ۲\,s$ مکان متحرک $x_۱ = +۱۶\,m$ و در لحظهٔ $t_۲ = ۶\,s$ مکان متحرک $x_۲ = -۱۶\,m$ است؛ بنابراین:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} \Rightarrow v_{av} = \frac{(-۱۶\,m) - (۱۶\,m)}{۶\,s - ۲\,s} = \frac{-۳۲\,m}{۴\,s} = -۸\,m/s$$

مثال و پاسخ



مثال داستان مسابقهٔ دوی لاک‌پشت و خرگوش را که شنیده‌اید! فرض کنید این بار مسیر مسابقه، خط راستی به طول یک کیلومتر است. خرگوش مغرور به لاک‌پشت ارفاق می‌کند و در خط شروع باقی می‌ماند و لاک‌پشت شروع به حرکت می‌کند. اگر سرعت متوسط خرگوش ۱۸ km / h و سرعت متوسط لاک‌پشت ۹۰ m / h باشد، پس از طی چند متر توسط لاک‌پشت، خرگوش شروع به حرکت کند تا این بار مسابقه را از لاک‌پشت ببرد؟

پاسخ ابتدا حساب می‌کنیم که خرگوش برای طی مسافت $۱۰۰۰\ m$، چه مدت‌زمانی را نیاز دارد. برای این کار ابتدا سرعت متوسط خرگوش را به متر بر ثانیه تبدیل کرده و سپس زمان مورد نیاز را حساب می‌کنیم:

$$v_{av}\ \text{خرگوش} = ۱۸\ km/h \div ۳/۶ = ۵\ m/s$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{v_{av}} = \frac{۱۰۰۰\ m}{۵\ m/s} = ۲۰۰\ s$$

حالا محاسبه می‌کنیم که در مدت $۲۰۰\ s$، لاک‌پشت چه مسافتی را می‌تواند طی کند:

$$\Delta x = v'_{av}\Delta t = (۹۰\ m/h \times ۱\frac{h}{۳۶۰۰s}) \times ۲۰۰\ s = ۵\ m$$

وقتی که لاک‌پشت هنوز به ۵ متری خط پایان نرسیده است، خرگوش باید شروع به حرکت کند تا برندهٔ مسابقه شود. اما مسئله مقدار مسافت طی‌شده توسط لاک‌پشت قبل از حرکت خرگوش را می‌خواهد؛ پس:

$$\text{مسافت طی‌شده توسط لاک‌پشت} = (۱۰۰۰\ m) - (۵\ m) = ۹۹۵\ m$$

سرعت متوسط در حرکت چندمرحله‌ای

اگر جسمی حرکتی را در چند مرحله انجام دهد، سرعت متوسط متحرک از نسبت مجموع جابه‌جایی‌ها به مجموع زمان‌های سپری‌شده به دست می‌آید:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x_۱ + \Delta x_۲ + \cdots}{\Delta t_۱ + \Delta t_۲ + \cdots}$$

مثال و پاسخ

مثال **شخصی مسیر مستقیمی را ابتدا در مدت ۶ دقیقه با سرعت متوسط $۳\ m/s$ و سپس در مدت ۴ دقیقه با سرعت متوسط $۲\ m/s$ دویده است. سرعت متوسط این شخص چند متر بر ثانیه است؟**

پاسخ ابتدا در هر قسمت از حرکت، جابه‌جایی این شخص را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{مرحلهٔ اول}\begin{cases}\Delta t_۱ = ۶\min = ۳۶۰\ s\\ v_{av,۱} = ۳\ m/s\end{cases} \Rightarrow \Delta x_۱ = v_{av,۱}.\Delta t_۱ = (۳\ m/s)\times(۳۶۰\ s) = ۱۰۸۰\ m$$

$$\text{مرحلهٔ دوم}\begin{cases}\Delta t_۲ = ۴\min = ۲۴۰\ s\\ v_{av,۲} = ۲\ m/s\end{cases} \Rightarrow \Delta x_۲ = v_{av,۲}.\Delta t_۲ = (۲\ m/s)\times(۲۴۰\ s) = ۴۸۰\ m$$

حالا سرعت متوسط این شخص را محاسبه می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x_۱ + \Delta x_۲}{\Delta t_۱ + \Delta t_۲} = \frac{۱۰۸۰\ m + ۴۸۰\ m}{۳۶۰\ s + ۲۴۰\ s} = \frac{۱۵۶۰\ m}{۶۰۰\ s} = ۲/۶\ m/s$$

تندی متوسط

دیدیم که اگر جابه‌جایی یک جسم را بر مدت‌زمان جابه‌جایی تقسیم کنیم، سرعت متوسط جسم به دست می‌آید. اما اگر به جای جابه‌جایی، **مسافت طی‌شده** را بر زمانی که آن مسافت طی‌شده است، تقسیم کنیم، چه چیزی خواهیم داشت؟ جواب «**تندی متوسط**» است.

به نسبت مسافت پیموده‌شده به مدت‌زمان طی مسافت، **تندی متوسط** می‌گوییم و آن را با S_{av} نمایش می‌دهیم؛ یعنی:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$$

در رابطهٔ تندی متوسط، l مسافت طی‌شده برحسب متر (m)، Δt بازهٔ زمانی برحسب ثانیه (s) و s_{av} تندی متوسط برحسب متر بر ثانیه (m/s) است.

تندی متوسط چه تفاوتی با سرعت متوسط دارد؟

این دو کمیت کاملاً با هم متفاوت‌اند. **سرعت متوسط کمیتی برداری است**؛ یعنی هم دارای اندازه و یکا و هم دارای جهت است. **ولی تندی متوسط، کمیتی نرده‌ای است** و فقط با یک عدد و یکای مربوطه بیان می‌شود.

ممکن است این سؤال در ذهنتان ایجاد شود که «آیا حالتی وجود دارد که **اندازهٔ** سرعت متوسط با تندی متوسط برابر باشد؟» جواب شما مثبت است:

«اگر متحرکی بدون تغییر جهت روی خط راست حرکت کند، مسافت طی‌شده با مقدار جابه‌جایی برابر است؛ در نتیجه اندازهٔ سرعت متوسط با تندی متوسط برابر است.»

برای این‌که بیشتر به تفاوت این دو کمیت پی ببرید، به نمونهٔ زیر توجه کنید:

نمونه رکورد شنای ۴۰۰ متر آزاد با زمان ۳ دقیقه و ۴۰ ثانیه در اختیار «پُل بیدرمن» از آلمان است. پُل برای ثبت این رکورد، طول ۲۰۰ متری استخر را به صورت رفت و برگشت شنا کرد؛ بنابراین تندی متوسط پُل برابر است با:

$$\text{زمان کل حرکت}: ۳\min \times \frac{۶۰\ s}{۱\min} + ۴۰\ s = ۱۸۰\ s + ۴۰\ s = ۲۲۰\ s$$

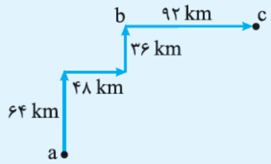
$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۴۰۰(m)}{۲۲۰(s)} \simeq ۱/۸۲\ m/s$$

اما سرعت متوسط آقای بیدرمن در این بازهٔ زمانی صفر است؛ زیرا در انتهای مسابقه به مکان اولیهٔ خود برگشته است و جابه‌جایی او در مدت ۳ دقیقه و ۴۰ ثانیه (۲۲۰ s) صفر است. $d = ۰ \Rightarrow v_{av} = ۰$

نکته برای به دست آوردن سرعت متوسط و تندی متوسط، باید کل زمان را در نظر بگیرید. در واقع زمان‌هایی که متحرکی می‌ایستد، جزئی از حرکت است.

مثال و پاسخ

مثال **در زمان‌های قدیم یک مرد روستایی با یک شتر از روستای (a) مطابق شکل به ترتیب ۶۴ km را در مدت‌زمان ۴ ساعت و ۴۸ km را در مدت ۳ ساعت، ۳۶ km را در مدت ۲ ساعت طی می‌کند و پس از یک ساعت استراحت در روستای (b)، ۹۲ km دیگر را در مدت ۱۰ ساعت طی می‌کند تا به روستای (c) برسد.**



الف) بردار سرعت متوسط شتر را در کل مسیر رسم کرده و بزرگی آن را محاسبه کنید.

ب) تندی متوسط را حساب کنید.

پاسخ **الف** اولین جابه‌جایی $\vec{d}_۱ = (۶۴\ km)\vec{j}$، دومین جابه‌جایی $\vec{d}_۲ = (۴۸\ km)\vec{i}$، سومین جابه‌جایی $\vec{d}_۳ = (۳۶\ km)\vec{j}$ و در نهایت آخرین جابه‌جایی $\vec{d}_۴ = (۹۲\ km)\vec{i}$ است. برای محاسبهٔ سرعت متوسط، باید جابه‌جایی کل را بر مدت‌زمان کل (یعنی با در نظر گرفتن زمان استراحت)، تقسیم می‌کنیم:

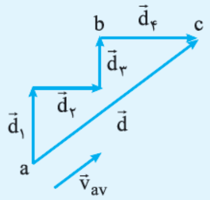
$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \frac{\vec{d}_۱ + \vec{d}_۲ + \vec{d}_۳ + \vec{d}_۴}{\Delta t_۱ + \Delta t_۲ + \Delta t_۳ + \Delta t_۴ + \Delta t_۵} = \frac{(۶۴km)\vec{j} + (۴۸km)\vec{i} + (۳۶km)\vec{j} + (۹۲km)\vec{i}}{۴\,h + ۳\,h + ۲\,h + ۱\,h + ۱۰\,h}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{av} = \frac{(۱۴۰km)\vec{i} + (۱۰۰km)\vec{j}}{۲۰h} \Rightarrow \vec{v} = (۷\vec{i} + ۵\vec{j})\ km/h$$

توجه کنید که زمان یک ساعت استراحت را هم در محاسبات در نظر گرفتیم؛ زیرا این یک ساعت نیز جزئی از زمان‌های سپری‌شده در مدت جابه‌جایی از روستای (a) به روستای (c) است. حالا بزرگی سرعت متوسط را به دست می‌آوریم:

$$|\vec{v}_{av}| = \sqrt{(۷)^۲ + (۵)^۲}\ km/h = \sqrt{۷۴}\ km/h \simeq ۸/۶۰\ km/h$$

بردار سرعت متوسط همیشه هم‌جهت با بردار جابه‌جایی است. بردار جابه‌جایی را رسم می‌کنیم تا جهت بردار سرعت متوسط نیز مشخص شود.



ب برای محاسبهٔ تندی متوسط، کل مسافت طی‌شده را بدون توجه به جهت آن، بر کل مدت‌زمان طی مسافت تقسیم می‌کنیم:

$$S_{av} = \frac{l_۱ + l_۲ + l_۳ + l_۴}{\Delta t_۱ + \Delta t_۲ + \Delta t_۳ + \Delta t_۴ + \Delta t_۵} = \frac{(۶۴\ km) + (۴۸\ km) + (۳۶\ km) + (۹۲\ km)}{۴\,h + ۳\,h + ۲\,h + ۱\,h + ۱۰\,h}$$

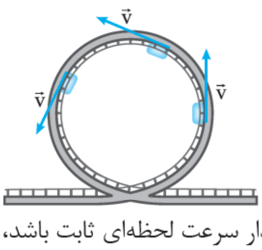
$$\Rightarrow S_{av} = \frac{۲۴۰\ km}{۲۰\ h} = ۱۲\ km/h$$

در این مثال هم دیدیم چون متحرک تغییر جهت داشته است، سرعت متوسط و تندی متوسط با هم برابر نیستند.

سرعت و تندی لحظه‌ای

سرعت متحرک در هر لحظه را «سرعت لحظه‌ای» می‌نامیم و آن را با $\vec{v}$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین تندی متحرک در هر لحظه را نیز تندی لحظه‌ای می‌نامیم.

سرعت لحظه‌ای نیز یک کمیت برداری است که مطابق با آن‌چه که در شکل روبه‌رو می‌بینید، **همواره بر مسیر حرکت مماس است**. اما تندی لحظه‌ای کمیتی نرده‌ای است. در واقع سرعت لحظه‌ای، اندازه و جهت سرعت در هر لحظه را نشان می‌دهد اما تندی لحظه‌ای فقط اندازهٔ سرعت در هر لحظه را بیان می‌کند؛ بنابراین می‌توانیم بگوییم: **تندی لحظه‌ای همان اندازهٔ سرعت لحظه‌ای** است. تندی لحظه‌ای $= |\vec{v}| = v$



تذکر سرعت لحظه‌ای و سرعت متوسط، دو کمیت کاملاً متفاوت‌اند. تنها در صورتی که در یک بازهٔ زمانی، بردار سرعت لحظه‌ای ثابت باشد، یعنی هم اندازه و هم جهت سرعت لحظه‌ای تغییر نکند، سرعت متوسط در آن بازهٔ زمانی با سرعت در هر لحظه برابر است. این اتفاق فقط در حرکت بر خط راست، امکان‌پذیر است. اگر $\vec{v} =$ ثابت $\Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_{av} \Rightarrow |\vec{v}| = |\vec{v}_{av}|$

سرعت و تندی لحظه‌ای در حرکت بر خط راست

وقتی متحرکی روی خط راست حرکت می‌کند، می‌توانیم از خواص برداری سرعت لحظه‌ای صرف‌نظر کنیم و سرعت لحظه‌ای را با علامتی مثبت یا منفی نشان دهیم. علامت سرعت لحظه‌ای نشان‌دهندهٔ جهت حرکت متحرک در آن لحظه است. اگر سرعت مثبت بود، یعنی متحرک به سمت مثبت محور xها حرکت می‌کند و اگر سرعت منفی بود، یعنی متحرک به سمت منفی محور xها حرکت می‌کند.

تذکر تندی لحظه‌ای فقط اندازهٔ سرعت لحظه‌ای را نشان می‌دهد؛ پس همواره مثبت است.

توجه از این به بعد هر جا از کلمهٔ «سرعت» و یا «تندی» به تنهایی استفاده کردیم، به ترتیب منظورمان بردار سرعت لحظه‌ای و تندی لحظه‌ای است.

مثال و پاسخ

مثال **در یک توصیهٔ راهنمایی و رانندگی آمده است: «رانندهٔ عزیز! اگر یک مسیر ۱۰۰ کیلومتری را با تندی 110 km / h برانید، فقط ۱۲ دقیقه زودتر از زمانی به مقصد می‌رسید که با تندی 90 km / h برانید. آیا ۱۲ دقیقه ارزش خطرآفرینی دارد؟» درستی این ادعا را از نظر فیزیکی بررسی کنید.**

پاسخ **گام اول** مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا ۱۰۰ کیلومتر را با تندی 110 km / h طی کنیم، محاسبه می‌کنیم:

$$S = s_{av} = \frac{L}{\Delta t} \Rightarrow 110\frac{km}{h} = \frac{100\,km}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{100\,km}{110\,km/h} = \frac{10}{11}h$$

گام دوم مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا ۱۰۰ کیلومتر را با تندی 90 km / h طی کنیم، محاسبه می‌کنیم:

$$S' = s'_{av} = \frac{L}{\Delta t'} \Rightarrow 90\frac{km}{h} = \frac{100\,km}{\Delta t'} \Rightarrow \Delta t' = \frac{100\,km}{90\,km/h} = \frac{10}{9}h$$

گام سوم حالا این دو زمان را از هم کم می‌کنیم و یکای جواب را به دقیقه تبدیل می‌کنیم تا مشخص شود چند دقیقه با هم اختلاف دارند:

$$t' - t = \frac{10}{9}(h) - \frac{10}{11}(h) = \frac{110-90}{99} = \frac{20}{99}h \times \frac{60\,min}{1\,h} \simeq 12/1\,min$$

پس واقعاً تفاوت زمان رسیدن در حدود ۱۲ دقیقه است و انصافاً ۱۲ دقیقه ارزش خطرآفرینی ندارد!

تندشونده یا کندشونده بودن حرکت

حتماً برای شما خیلی پیش آمده که در یک اتومبیل نشسته‌اید و رانندهٔ اتومبیلی که در آن هستید، می‌خواهد از یک اتومبیل که جلوی شما حرکت می‌کند، سبقت بگیرد. فرض کنید در ابتدا، تندی اتومبیل شما و اتومبیل جلویی یکسان باشد. برای این‌که از اتومبیل جلویی سبقت بگیرید، باید رانندهٔ شما تندی اتومبیلش را افزایش دهد. در این حالت حرکت اتومبیل شما تندتر و تندتر می‌شود تا بتوانید از اتومبیل جلویی سبقت بگیرید. در واقع حرکت اتومبیل شما **تندشونده** خواهد بود.

حالا فرض کنید یک نیسان آبی از جلو به سمت شما بیاید. شما و رانندهٔ اتومبیلی که سوار آن هستید، می‌دانید که رانندهٔ نیسان آبی حتماً ترمز نخواهد کرد!!! پس رانندهٔ اتومبیل شما پایش را با تمام قدرت روی پدال ترمز فشار می‌دهد و تندی اتومبیلش را کاهش می‌دهد. در این حالت حرکت شما کندتر و کندتر می‌شود. در واقع در این حالت، حرکت شما **کندشونده** خواهد بود.

جمع‌بندی وقتی تندی یک متحرکی زیاد می‌شود، حرکت **تندشونده** است و وقتی تندی یک متحرک کم می‌شود، حرکت **کندشونده** است.

سؤال‌های امتحانی

۸- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف) اگر متحرکی روی خط راست بدون تغییر جهت حرکت کند، اندازهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط آن برابر است.

ب) اگر سرعت متوسط یک متحرک صفر باشد، مسافت طی‌شده توسط آن صفر است.

۹- جای خالی زیر را کامل کنید.

الف) اگر هنگام گزارش تندی لحظه‌ای، به جهت حرکت متحرک نیز اشاره کنیم، در واقع .... آن را بیان کرده‌ایم.

ب) سرعت لحظه‌ای کمیتی .... و تندی لحظه‌ای کمیتی .... است.

پ) اگر سرعت متحرک در تمام لحظات یک بازهٔ زمانی .... باشد، سرعت متوسط با سرعت لحظه‌ای برابر است.

۱۰- کلمهٔ مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید.

الف) در حرکت یک جسم در بازه‌های زمانی‌ای که سرعت متوسط خودرو (مثبت / منفی) است، حرکت خودرو در جهت محور x است. *(برگرفته از مثال کتاب درسی)*

ب) در حرکت جسم روی مسیر خمیده، بردار سرعت متحرک همواره بر (بردار شتاب / مسیر حرکت) مماس است. *(نهایی تجربی - شهریور ۹۵)*

پ) در حرکت یک‌بعدی، جهت حرکت با توجه به جهت (شتاب / سرعت) تعیین می‌شود. *(نهایی تجربی - شهریور ۹۵)*

ت) بردار سرعت متوسط با بردار (جابه‌جایی / تغییر سرعت) هم‌جهت است. *(نهایی ریاضی - دی ۹۲)*

۱۱- سرعت متوسط را تعریف کنید. *(نهایی تجربی - اسفند ۸۷ و ۸۹ و شهریور ۸۹)*

۱۲- مفهوم فیزیکی عبارت زیر را بیان کنید. *(برگرفته از مثال کتاب درسی)*

«تندی متوسط دانش‌آموزی $۱/۴\,m/s$ است.»

۱۳- اگر چهار متحرک در طی $۲\,s$ بر روی مسیری مستقیم از مکان آغازین به مکان پایانی رفته باشند، جدول زیر را کامل کنید. *(مشابه فعالیت کتاب درسی)*

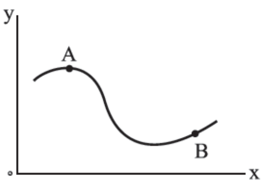
	مکان آغازین	مکان پایانی	بردار جابه‌جایی	سرعت متوسط	جهت حرکت
متحرک A	۴ m	صفر			
متحرک B	۵/۲ m	−۲/۴ m			
متحرک C	−۲ m	۴/۸ m			
متحرک D	−۱۰ m	−۲ m			

۱۴- شکل زیر، حرکت یک سوسک را که در راستای محور x در حرکت است، در هر یک از لحظه‌های $t_1 = ۱۰\,s$ و $t_2 = ۴۰\,s$ نشان می‌دهد. *(مشابه مثال کتاب درسی)*

الف) بردارهای مکان و بردار جابه‌جایی سوسک را در این بازهٔ زمانی رسم کنید.

ب) سرعت متوسط سوسک را در این بازهٔ زمانی پیدا کنید.

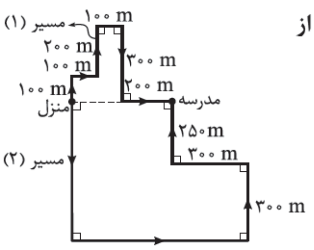
۱۵- در شکل مقابل، مسیر حرکت جسمی که با تندی ثابت در صفحهٔ xoy از A به B می‌رود، نشان داده شده است. با انتقال شکل به پاسخ‌نامه، بردارهای زیر را نشان دهید: *(نهایی تجربی - دی ۸۷)*



الف) بردار تغییر مکان (جابه‌جایی) جسم بین دو نقطهٔ A و B.

ب) بردارهای سرعت لحظه‌ای جسم در دو نقطهٔ A و B.

۱۶- سعید و حمید برای رفتن به مدرسه از منزل خارج می‌شوند. سعید تمام مسیر (۱) را می‌دود ولی حمید از مسیر (۲) با تاکسی به مدرسه می‌رود. هر دو هم‌زمان و پس از ۴ دقیقه و ۱۰ ثانیه به مدرسه می‌رسند.



الف) اندازهٔ سرعت متوسط هر یک از آن‌ها را محاسبه کنید.

ب) تندی هر یک از آن‌ها را محاسبه کنید.

۱۷- اتومبیلی یک میدان دایره‌شکل به شعاع $۱۲۵\,m$ را دور می‌زند. اگر سرعت متوسط در مدتی که این اتومبیل نصف میدان را دور می‌زند، $۵\,m/s$ باشد، تندی متوسط اتومبیل را محاسبه کنید. $(\pi = ۳/۱۴)$

۱۸- درختی به ارتفاع $۱۵\,m$ را از پایین‌ترین نقطه قطع می‌کنیم و درخت در مدت $۱/۵\,s$ بر زمین می‌افتد. سرعت متوسط بالاترین نقطهٔ درخت در مدت‌زمان سقوط چند متر بر ثانیه است؟

۱۹- در هر یک از حالات زیر، سرعت متوسط را محاسبه کنید.

الف) متحرکی بر خط راست بدون تغییر جهت دو مسافت مساوی Δx را با سرعت‌های متوسط v_1 و v_2 طی کند.

ب) متحرکی بر خط راست بدون تغییر جهت در دو بازهٔ زمانی مساوی Δt با سرعت‌های متوسط v_1 و v_2 حرکت کند.

۲۰- متحرکی روی خط راست و بدون تغییر جهت، مسافت‌های متوالی $۱۰\,m$، $۲۰\,m$ و $۳۰\,m$ را به ترتیب با سرعت‌های $۲\,m/s$، $۴\,m/s$ و $۶\,m/s$ طی می‌کند. سرعت متوسط آن در این حرکت چند m/s است؟

۲۱- متحرکی روی خط راست و بدون تغییر جهت، $\frac{۱}{۲}$ زمان حرکت خود را با سرعت $۶۰\,m/s$، $\frac{۱}{۳}$ زمان حرکت خود را با سرعت $۲۴\,m/s$ و مابقی را با سرعت $۱۲\,m/s$ طی می‌کند. سرعت متوسط حرکت متحرک چند متر بر ثانیه است؟

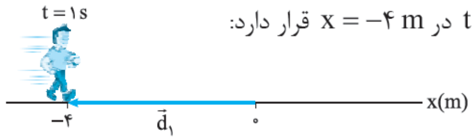
پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱- الف) مسافت   ب) بردار مکان

۲- الف) دوبعدی   ب) برابر با

۳- پاره‌خط جهت‌داری که مکان آغازین حرکت را به مکان پایانی حرکت وصل می‌کند، بردار جابه‌جایی نامیده می‌شود. یکای جابه‌جایی، متر (m) است.

۴- الف) بردار مکان این بازیکن خوب در $t = ۱s$ به صورت برداری است که مبدأ مکان را به محل حضور او در این لحظه وصل می‌کند. ایشان در $t = ۱s$ در $x = -۴\ m$ قرار دارد:



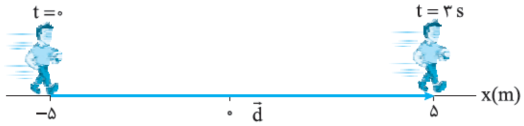
$$\vec{d}_۱ = (-۴\ m)\vec{i}$$

ب) بردار مکان آقای صلاح در $t = ۰$ به صورت $\vec{d}_۰ = -۵\vec{i}$ و بردار مکان او در $t = ۴\ s$ به صورت $\vec{d}_۴ = ۴\vec{i}$ است؛ پس:

$$\vec{d} = \vec{d}_۴ - \vec{d}_۰ = (۴\ m)\vec{i} - (-۵\ m)\vec{i} = (۹\ m)\vec{i}$$

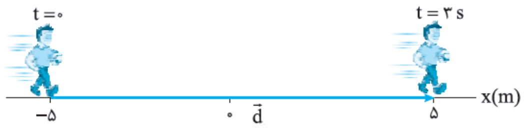
اما سؤال اندازهٔ جابه‌جایی را خواسته است؛ پس: $d = ۹\ m$

پ) بردار جابه‌جایی آقای صلاح برابر است با:



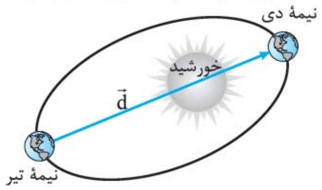
$$\vec{d} = \Delta x\vec{i} = (۵\ m - (-۴\ m))\vec{i} = ۹\vec{i}$$

ت) مسافت طی‌شده برابر طول کلی مسیری است که او طی می‌کند. آقای صلاح ابتدا از $x = -۵m$ به $x = ۵m$ می‌رود و پس از $x = ۵m$ به سمت منفی x برمی‌گردد و در $t = ۴s$ به $x = ۴m$ می‌رسد؛ پس کل طولی که او طی کرده است، برابر است با:



$$l = |\Delta x_۱| + |\Delta x_۲| = |۵\ m - (-۵\ m)| + |۴\ m - ۵\ m|$$
$$= |۱۰\ m| + |-۱\ m| = ۱۰\ m + ۱\ m = ۱۱\ m$$

۵- از نقطهٔ ابتدایی حرکت به نقطهٔ انتهایی حرکت وصل می‌کنیم و بردار جابه‌جایی را مشخص می‌کنیم:



طول این بردار برابر است با:

$$d = ۱۵۲ \times ۱۰^۶\ km + ۱۴۷ \times ۱۰^۶\ km = ۲۹۹ \times ۱۰^۶\ km$$

مسافت طی‌شده در این مدت نصف طول مدار است؛ پس:

$$l = \frac{۹۴۰ \times ۱۰^۶\ km}{۲} = ۴۷۰ \times ۱۰^۶\ km$$

همان‌طور که می‌بینید، $d < l$ است.

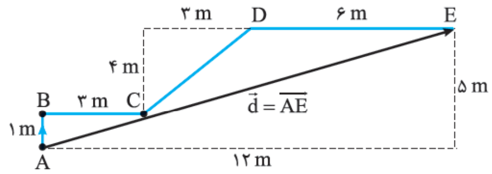
۶- الف) **گام اول** ابتدا طول قسمت CD را حساب می‌کنیم:

$$CD^۲ = ۴^۲ + ۳^۲ \Rightarrow CD^۲ = ۱۶ + ۹ = ۲۵$$
$$\Rightarrow CD = \sqrt{۲۵} = ۵\ m$$

گام دوم مسافت طی‌شده برابر با طول کل مسیر است:

$$l = AB + BC + CD + DE$$
$$= ۱\ m + ۳\ m + ۵\ m + ۶\ m = ۱۵\ m$$

ب) بردار جابه‌جایی برداری است که ابتدای مسیر را به انتهای مسیر وصل می‌کند؛ پس در شکل زیر بردار جابه‌جایی، بردار $\overrightarrow{AE}$ است.



پ) در شکل بالا می‌بینید که علی مجموعاً ۱۲ m به سمت راست و ۵ m به سمت بالا حرکت کرده است؛ پس طول $\vec{d}$ برابر است با:

$$d^۲ = ۱۲^۲ + ۵^۲ = ۱۴۴ + ۲۵ = ۱۶۹ \Rightarrow d = \sqrt{۱۶۹} = ۱۳\ m$$

ت) علی ۱۲m به سمت راست حرکت کرده است؛ پس جابه‌جایی در راستای افقی به صورت $(۱۲\ m)\vec{i}$ است. او هم‌چنین ۵m به سمت بالا حرکت کرده است. در نتیجه جابه‌جایی در راستای قائم او به صورت $(۵\ m)\vec{j}$ است و داریم: $\vec{d} = (۱۲\vec{i} + ۵\vec{j})m$

۷- بردار جابه‌جایی از تفاضل بردارهای مکان به دست می‌آید:

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} ۸ \\ ۲ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ \\ ۵ \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{d} = ۶\vec{i} + ۵\vec{j}$$

و اندازهٔ بردار جابه‌جایی برابر است با:

$$|\vec{d}| = \sqrt{۶^۲ + ۵^۲} = \sqrt{۳۶ + ۲۵} = \sqrt{۶۱}$$

۸- الف) درست

ب) نادرست ـ اگر سرعت متوسط یک متحرک صفر باشد، جابه‌جایی آن متحرک صفر است نه مسافت آن.

۹- الف) سرعت لحظه‌ای   ب) برداری ـ نرده‌ای

پ) ثابت

۱۰- الف) مثبت   ب) مسیر حرکت

پ) سرعت

ت) جابه‌جایی ـ بردار سرعت متوسط برابر با بردار جابه‌جایی تقسیم بر زمان است. زمان یک عدد مثبت است؛ پس بردار سرعت متوسط و جابه‌جایی هم‌جهت هستند.

۱۱- سرعت متوسط کمیتی برداری است که از تقسیم جابه‌جایی بر مدت‌زمان لازم برای جابه‌جایی به دست می‌آید و واحد آن m / s است:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t}$$

۱۲- مفهوم فیزیکی این عبارت این است که دانش‌آموز به طور متوسط در هر ثانیه $۱/۴\,m$ از طول مسیرش را می‌پیماید.

۱۳- متحرک A: بردار جابه‌جایی:

$$\vec{d} = \Delta x \vec{i} = (۰ - ۴\,m)\vec{i} = -۴\,m\vec{i}$$

سرعت متوسط: $v_{av} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{-۴\,m}{۲\,s} = -۲\,m/s$

جهت حرکت با توجه به این‌که بردار جابه‌جایی به سمت منفی $\vec{i}$ها است، منفی است.

متحرک B: بردار جابه‌جایی:

$$\vec{d} = \Delta x \vec{i} = (-۲/۴\,m - ۵/۲\,m)\vec{i} = (-۷/۶\,m)\vec{i}$$

سرعت متوسط: $v_{av} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{-۷/۶\,m}{۲\,s} = -۳/۸\,m/s$

جهت حرکت: منفی

متحرک C: بردار جابه‌جایی:

$$\vec{d} = \Delta x \vec{i} = (۴/۸\,m - (-۲\,m)) = ۶/۸\,m\vec{i}$$

سرعت متوسط: $v_{av} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{۶/۸\,m}{۲\,s} = ۳/۴\,m/s$

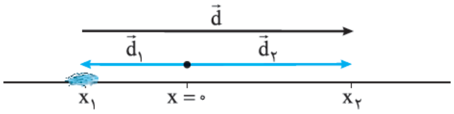
جهت حرکت: مثبت

متحرک D: بردار جابه‌جایی:

$$\vec{d} = \Delta x \vec{i} = (-۲\,m - (-۱۰\,m))\vec{i} = (۸\,m)\vec{i}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۸\,m}{۲\,s} = ۴\,m/s$$

۱۴- الف) بردار مکان در هر لحظه، به صورت برداری است که از مبدأ مختصات به محل جسم وصل می‌شود. بردار جابه‌جایی هم محل ابتدایی جسم را به محل نهایی آن وصل می‌کند؛ پس بردار مکان اولیهٔ ($\vec{d}_1$)، بردار مکان نهایی ($\vec{d}_2$) و بردار جابه‌جایی ($\vec{d}$) به صورت زیر رسم می‌شوند.



ب) چون سوسک در راستای خط راست حرکت می‌کند، سرعت متوسط آن برابر است با:

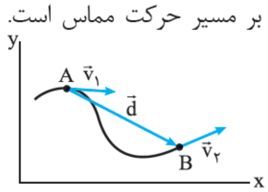
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{۰/۳\,m - (-۰/۲\,m)}{۴۰\,s - ۱۰\,s}$$

$$= \frac{۰/۵\,m}{۳۰\,s} = ۰/۰۱۷\,m/s$$

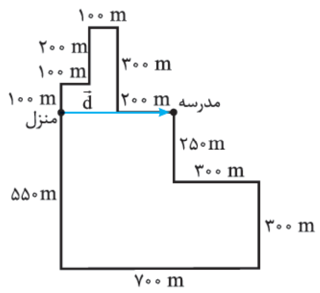
مثبت‌بودن سرعت نشان می‌دهد که سوسک در جهت مثبت محور x حرکت کرده است.

۱۵- الف) بردار جابه‌جایی، نقطهٔ ابتدایی را به نقطهٔ انتهایی وصل می‌کند و جهت آن به سمت نقطهٔ انتهایی است.

ب) بردار سرعت لحظه‌ای، در هر نقطه بر مسیر حرکت مماس است. از طرفی چون تندی ثابت است، اندازهٔ سرعت‌های لحظه‌ای و در نتیجه طول بردارهای سرعت باید برابر باشد.



۱۶- الف) برای محاسبهٔ سرعت متوسط به جابه‌جایی نیاز داریم. می‌دانیم که جابه‌جایی به مسیر حرکت بستگی ندارد و فقط به نقطهٔ ابتدایی و انتهایی مسیر بستگی دارد. بردار جابه‌جایی، برداری است که منزل را به مدرسه وصل می‌کند.



از روی شکل و با توجه به اندازه‌های داده‌شده مشخص است که بزرگی بردار جابه‌جایی سعید و حمید هر دو در مدت ۴ دقیقه و ۱۰ ثانیه (۲۵۰s) به اندازهٔ ۴۰۰ متر جابه‌جا شده‌اند، بنابراین داریم:

$$|\vec{v}_{av}| = \frac{|\vec{d}|}{\Delta t} = \frac{۴۰۰\,m}{۲۵۰\,s} = ۱/۶\,m/s$$

ب) برای محاسبهٔ تندی متوسط، مسافت طی‌شده برای ما مهم است و مسافت طی‌شده به مسیر حرکت بستگی دارد که برای سعید و حمید متفاوت است. ابتدا با توجه به اعداد داده‌شده روی شکل طول مسیرهای داده‌شده را به دست می‌آوریم و بعد مسافت طی‌شده توسط سعید و حمید را محاسبه می‌کنیم:

$$l_{\text{سعید}} = ۱۰۰\,m + ۱۰۰\,m + ۲۰۰\,m + ۱۰۰\,m + ۳۰۰\,m + ۲۰۰\,m = ۱۰۰۰\,m$$

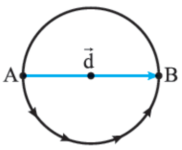
$$l_{\text{حمید}} = ۵۵۰\,m + ۷۰۰\,m + ۳۰۰\,m + ۳۰۰\,m + ۲۵۰\,m = ۲۱۰۰\,m$$

حالا تندی متوسط هر کدام را به دست می‌آوریم:

$$s_{av_{\text{سعید}}} = \frac{l_{\text{سعید}}}{\Delta t} = \frac{۱۰۰۰\,m}{۲۵۰\,s} = ۴\,m/s$$

$$s_{av_{\text{حمید}}} = \frac{l_{\text{حمید}}}{\Delta t} = \frac{۲۱۰۰\,m}{۲۵۰\,s} = ۸/۴\,m/s$$

۱۷- وقتی اتومبیل نصف میدان را دور می‌زند، اندازهٔ جابه‌جایی اتومبیل برابر است با قطر میدان، بنابراین:



$$|\vec{d}| = ۲ \times (۱۲۵\,m) = ۲۵۰\,m$$

حالا با استفاده از رابطهٔ سرعت متوسط، زمان طی نیم دور را به دست می‌آوریم:

$$|\vec{v}_{av}| = \frac{|\vec{d}|}{\Delta t} \Rightarrow ۵\,m/s = \frac{۲۵۰\,m}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{۲۵۰\,m}{۵\,m} = ۵۰\,s$$

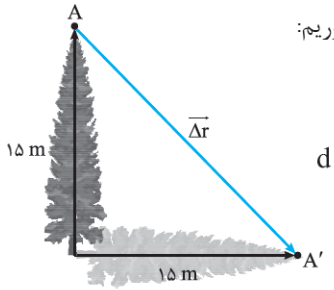
حالا که زمان طی نیم دور را داریم، مسافت نیم دور را که نصف محیط دایره است، به دست می‌آوریم:

$$l = \frac{۱}{۲} \times \text{محیط} = \frac{۱}{۲} \times ۲\pi R = ۳/۱۴ \times ۱۲۵(m) \simeq ۳۹۳\,m$$

و در آخر تندی متوسط اتومبیل برابر است با:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۳۹۳\,m}{۵۰\,s} = ۷/۸۶\,m/s$$

۱۸- برای مسئله یک شکل رسم می‌کنیم. برای سادگی درخت را با یک پاره‌خط جهت‌دار نشان می‌دهیم. در شکل نقاط A و A' بالاترین نقطهٔ درخت در حالت ایستاده و افتاده است. بردار جابه‌جایی این نقطه، برداری است که A را به A' وصل می‌کند. اندازهٔ $\Delta\vec{r}$ را با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس به دست می‌آوریم:



$$d=\sqrt{۱۵^۲+۱۵^۲}=۱۵\sqrt{۲}\ \text{m}$$

و حالا با استفاده از رابطهٔ سرعت متوسط داریم:

$$|\vec{v}_{av}|=\frac{|\vec{d}|}{\Delta t}=\frac{۱۵\sqrt{۲}\,(\text{m})}{۱/۵\,(\text{s})}=۱۰\sqrt{۲}\ \text{m/s}$$

۱۹- الف) سرعت متوسط متحرک برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x_۱+\Delta x_۲}{\Delta t_۱+\Delta t_۲}$$

در رابطهٔ بالا به جای Δt، مساوی آن یعنی $\frac{\Delta x}{v_{av}}$ را قرار می‌دهیم و چون $\Delta x_۱=\Delta x_۲=\Delta x$، داریم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x+\Delta x}{\frac{\Delta x}{v_{av,۱}}+\frac{\Delta x}{v_{av,۲}}}=\frac{۲\Delta x}{\frac{(v_۱+v_۲)\Delta x}{v_۱.v_۲}}\Rightarrow v_{av}=\frac{۲v_۱.v_۲}{v_۱+v_۲}$$

ب) سرعت متوسط متحرک برابر است با:
$$v_{av}=\frac{\Delta x_۱+\Delta x_۲}{\Delta t_۱+\Delta t_۲}$$

در رابطهٔ بالا به جای Δx، مساوی آن یعنی $v.\Delta t$ را قرار می‌دهیم و چون $\Delta t_۱=\Delta t_۲=\Delta t$، داریم:

$$v_{av}=\frac{v_۱.\Delta t+v_۲.\Delta t}{\Delta t+\Delta t}=\frac{(v_۱+v_۲)\cancel{\Delta t}}{۲\cancel{\Delta t}}\Rightarrow v_{av}=\frac{v_۱+v_۲}{۲}$$

از قسمت (ب) نتیجه می‌گیریم که اگر متحرکی در بازه‌های زمانی مساوی با سرعت‌های $v_۱$ و $v_۲$ حرکت کند، سرعت متوسط در کل مدت حرکت برابر با میانگین $v_۱$ و $v_۲$ است.

۲۰- سرعت متوسط برابر با جابه‌جایی کل تقسیم بر زمان کل است؛ پس اول به سراغ به دست آوردن زمان‌های هر یک از جابه‌جایی‌ها می‌رویم.

$$\Delta t_۱=\frac{\Delta x_۱}{v_۱}=\frac{۱۰\ \text{m}}{۲\ \text{m/s}}=۵\ \text{s}$$

$$\Delta t_۲=\frac{\Delta x_۲}{v_۲}=\frac{۲۰\ \text{m}}{۴\ \text{m/s}}=۵\ \text{s}$$

$$\Delta t_۳=\frac{\Delta x_۳}{v_۳}=\frac{۳۰\ \text{m}}{۶\ \text{m/s}}=۵\ \text{s}$$

حالا به سراغ محاسبهٔ سرعت متوسط می‌رویم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x_T}{\Delta t_T}=\frac{۱۰\ \text{m}+۲۰\ \text{m}+۳۰\ \text{m}}{۵\ \text{s}+۵\ \text{s}+۵\ \text{s}}=\frac{۶۰\ \text{m}}{۱۵\ \text{s}}=۴\ \text{m/s}$$

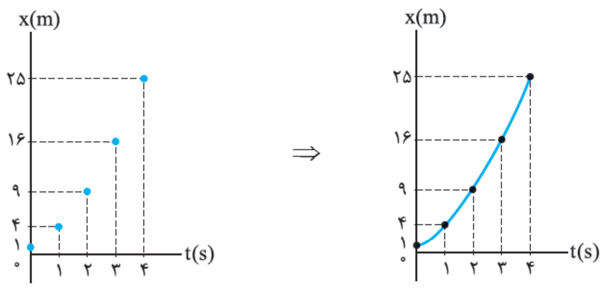
۲۱- اگر کل زمان حرکت را T بگیریم، متحرک مدت $\frac{T}{۲}$ را با سرعت $۶۰\ \text{m/s}$، $\frac{T}{۳}$ را با سرعت $۲۴\ \text{m/s}$ حرکت می‌کند؛ پس متحرک مدت‌زمان $T-(\frac{T}{۳}+\frac{T}{۲})=\frac{T}{۶}$ را با سرعت $۱۲\ \text{m/s}$ طی می‌کند:

$$v_{av}=\frac{\Delta x_T}{\Delta t_T}=\frac{(۶۰\ \text{m/s})\frac{T}{۲}+(۲۴\ \text{m/s})\frac{T}{۳}+(۱۲\ \text{m/s})\frac{T}{۶}}{T}$$

$$=(\frac{۳۰T+۸T+۲T}{T})\ \text{m/s}=۴۰\ \text{m/s}$$

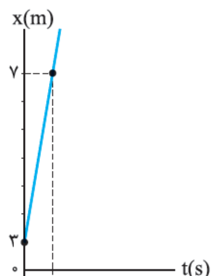
۲۲- در جدول زیر، مکان موتورسوار را در هر لحظه نشان داده‌ایم. ابتدا این نقاط را روی نمودار $x-t$ نشان می‌دهیم و سپس آن‌ها را به هم وصل می‌کنیم تا نمودار مکان ـ زمان متحرک رسم شود:

t(s)	۰	۱	۲	۳	۴
x(m)	۱	۴	۹	۱۶	۲۵



همان‌طور که می‌بینید، نمودار مکان‌ـ زمان متحرک به صورت یک منحنی شده است در حالی که مسیر حرکت متحرک خط صاف است؛ پس حواستان باشد که نمودار مکان‌ـ زمان، مسیر حرکت را نشان نمی‌دهد.

۲۳- چون x برحسب t خط است، کافی است دو نقطه از نمودار را داشته باشیم تا خط را رسم کنیم.



$$t=۰\ \Rightarrow\ x_{(t=۰)}=۴(۰)+۳=۳\ \text{m}$$

$$t=۱\text{s}\ \Rightarrow\ x_{(t=۱\,\text{s})}=۴(۱)+۳=۷\ \text{m}$$

۲۴- الف) برای این‌که مکان اولیه متحرک را به دست آوریم، کافی است t را مساوی صفر قرار دهیم: $x_{(t=۰)}=(۰)^۲-۴(۰)+۳=۳\text{m}$

ب) باید مکان در $t=۰$ و $t=۴\text{s}$ را با توجه به معادلهٔ مکان ـ زمان تعیین کنیم تا بتوانیم جابه‌جایی را حساب کنیم. مکان اولیه را که داریم، فقط می‌ماند مکان در $t=۴\text{s}$.

$$t=۴\text{s}\ \Rightarrow\ x(t)=t^۲-۴t+۳$$

$$\xrightarrow{t=۴\text{s}} x_{(t=۴\,\text{s})}=(۴)^۲-۴(۴)+۳=۱۶-۱۶+۳=۳\text{m}$$

پس جابه‌جایی برابر است با:

$$\Delta x_{(۰-۴\,\text{s})}=x_{(t=۴\,\text{s})}-x_{(t=۰)}=۳-۳=۰$$